5.2 Lineare Systeme

Sei weiterhin $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seien $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$, $\vec{y}_0 \in \mathbb{K}^n$, $\mathbf{A}: I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\vec{b}: I \to \mathbb{K}^n$ stetige matrix- bzw vektorwertige Funktionen.

Wir betrachten komplexe bzw reelle *lineare (Dgl-) Systeme n–ter Ordnung:*

$$\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\,\vec{y} + \vec{b}(x) \ . \tag{1}$$

Der Term $\vec{b}(x)$ heißt auch *Störfunktion* oder *Störglied*. Das System heißt *homogen*, falls $\vec{b}(x) \equiv \vec{0}$ ist, sonst *inhomogen*.

$$\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\,\vec{y} \tag{2}$$

heißt das zu (1) gehörende homogene System.

$$\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\,\vec{y} + \vec{b}(x) \quad ; \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \tag{3}$$

heißt *lineares Anfangswertprobleme (AWP) n–ter Ordnung.*

Lineare Anfangswertprobleme sind nach Peano lösbar. Ist $J \subset I$ ein kompaktes Teilintervall, so ist die rechte Seite in dem Streifen $J \times \mathbb{R}^n$ stetig und global Lipschitz-stetig bzgl $\vec{y}$. Also sind lineare Anfangswertprobleme nach Picard-Lindelöf eindeutig lösbar und die Lösungen können sämtlich auf das gesamte Grundintervall I fortgesetzt werden.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme

Das AWP (3) besitzt genau eine nicht fortsetzbare Lösung und diese ist im ganzen Grundintervall I definiert.
Für reelle AWP's ist auch die Lösung reell.

Das Wachstum der Lösungen kann man abschätzen:

Abschätzungssatz für lineare Systeme

Gegeben sei das AWP (3) und ein kompaktes Teilintervall J von I.
Seien $L, \delta > 0$, $x_0 \in J$. In J gelte $\|\mathbf{A}(x)\| \leq L$ und $\|\vec{b}\,(x)\| \leq \delta$.
Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung $\vec{y}$ des AWP's:

$$\|\vec{y}\,(x)\| \leq \|\vec{y}_0\|\, \mathrm{e}^{L|x-x_0|} + \frac{\delta}{L}\left(\mathrm{e}^{L|x-x_0|} - 1\right) \quad \text{für alle } x \in J \ .$$

Aus dieser Abschätzung folgt übrigens wieder der Eindeutigkeitssatz.

5.2.1 Struktur der Lösungen

Die Lösungen eines linearen Systems bilden einen n–dimensionalen Funktionenraum. Es gilt der

Struktursatz für lineare Systeme

Die $\mathbb{K}^n$–wertigen Lösungen eines linearen Systems n-ter Ordnung bilden einen n–dimensionalen affinen Funktionenraum über $\mathbb{K}$. Sie bilden einen Vektorraum, wenn das System homogen ist.
Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems ist Lösung des zugehörigen homogenen Systems.
Man erhält alle Lösungen des inhomogenen Systems in der Form

$$\vec{y}(x) \;=\; \vec{y}_s(x) + \vec{y}_h(x) \;=\; \vec{y}_s(x) + C_1\,\vec{y}_1(x) + \ldots + C_n\,\vec{y}_n(x)\;, \quad C_k \in \mathbb{K}\;.$$

Dabei ist $\vec{y}_s$ eine *spezielle* Lösung des inhomogenen und $\vec{y}_h$ eine beliebige Lösung des zugehörigen homogenen Systems.
$\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ sind Basislösungen des homogenen Systems.

Um ein lineares System zu lösen, braucht man daher

1) eine Basis des homogenen Lösungsraums, (siehe dazu Abschnitt 5.2.3)
2) eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (siehe dazu Abschnitt 5.2.6).

Außer für Systeme mit konstanten Koeffizienten gibt es kein allgemeines Verfahren zur Bestimmung einer Lösungsbasis für das homogene System. Sind Basislösungen des zugehörigen homogenen Systems bekannt, so erhält man eine spezielle Lösung $\vec{y}_s$ des inhomogenen Systems zumindest bis auf Integrationen durch Variation der Konstanten (siehe 5.2.6.a). Manchmal helfen auch spezielle Rateansätze.

Nützlich ist das folgende

Superpositionsprinzip

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\vec{y}_1{}' = \mathbf{A}(x)\,\vec{y}_1 + \vec{b}(x)$ und $\vec{y}_2{}' = \mathbf{A}(x)\,\vec{y}_2 + \vec{c}\,(x)$.
Dann löst $\vec{y} = \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2$ die Gleichung $\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\,\vec{y} + \Big(\alpha\,\vec{b}(x) + \beta\,\vec{c}\,(x)\Big)$.

5.2.2 Zusammenhang von reellen und komplexen Systemen

Ein komplexes System (1) : $\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ ist äquivalent zu dem reellen linearen System

$$\begin{pmatrix} \vec{u}\,' \\ \vec{v}\,' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathsf{Re}\,\mathbf{A}(x) & -\mathsf{Im}\,\mathbf{A}(x) \\ \mathsf{Im}\,\mathbf{A}(x) & \mathsf{Re}\,\mathbf{A}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathsf{Re}\,\vec{b}(x) \\ \mathsf{Im}\,\vec{b}(x) \end{pmatrix} \tag{4}$$

d.h. $\vec{y} = \vec{u} + i\vec{v}$ ist Lösung von (1) genau dann, wenn $(\vec{u}, \vec{v})^\top$ eine Lösung von (4) ist.

Daraus folgt:

> *Satz:*
> Sei $\mathbf{A}$ reell, also $\mathsf{Im}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$, und $\vec{\varphi}\colon I \to \mathbb{C}$ Lösung des Systems (1) : $\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$.
> Dann ist $\mathsf{Re}\,\vec{\varphi}$ Lösung des Systems $\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \mathsf{Re}\,\vec{b}(x)$ und $\mathsf{Im}\,\vec{\varphi}$ ist Lösung des Systems $\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \mathsf{Im}\,\vec{b}(x)$.

Insbesondere sind Real- und Imaginärteil einer Lösung eines reellen homogenen Systems ebenfalls Lösungen.

5.2.3 Homogene Systeme

Wir betrachten das homogene lineare System n-ter Ordnung

$$\vec{y}\,' \;=\; \mathbf{A}(x)\,\vec{y}\ . \tag{5}$$

Dabei sei wie üblich $\mathbf{A}\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ stetig, $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

> *Struktursatz für homogene Systeme*
>
> Die $\mathbb{K}^n$–wertigen Lösungen $\vec{y}\colon I \to \mathbb{K}^n$ eines homogenen Systems (5) bilden einen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$.
> Sei $x_0 \in I$ fest gewählt. Dann ist die Abbildung, die jedem Vektor $\vec{y}_0 \in \mathbb{K}^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des AWP's
>
> $$\vec{y}\,' \;=\; \mathbf{A}(x)\,\vec{y} \quad ; \quad \vec{y}(x_0) \;= \vec{y}_0$$
>
> zuordnet, ein Vektorraum-Isomorphismus vom $\mathbb{K}^n$ auf den Lösungsraum.

Eine Basis des Lösungsraums heißt auch *Fundamentalsystem.* Es gibt (außer bei konstanten Koeffizienten) kein allgemeines Verfahren, eine Lösungsbasis eines homogenen Systems zu finden. Kennt man eine Lösung, so kann man für die Suche nach weiteren die Ordnung des Systems durch den d'Alembertschen Reduktionsansatz verringern (siehe Abschnitt 5.2.4). Man kann das System n-ter Ordnung in eine lineare Gleichung n-ter Ordnung umwandeln und versuchen, für diese Lösungen zu finden. Siehe dazu z. B. Aufgabe 12.2.B.

Eine Matrix $\mathbf{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ heißt *Lösungsmatrix* des homogenen Systems (5), wenn die Spalten $\vec{y}_k$ Lösungen sind. Für Lösungsmatrizen gilt die sog. *Matrix-Differentialgleichung* $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{Y}$.

Eine Lösungsmatrix heißt *Wronski-Matrix,* falls $m = n$ ist. Sie heißt *Fundamentalmatrix,* falls die Spalten $\vec{y}_k$ außerdem linear unabhängig sind, also ein Fundamentalsystem bilden.

Ist $\mathbf{Y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ Wronski-Matrix von (5), so heißt $\det \mathbf{Y}$ *Wronski-Determinante* des Lösungssystems $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$.

Eine Wronski-Determinante ist entweder $\equiv 0$ oder nirgends $= 0$. Sie erfüllt eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

<u>*Satz von Liouville*</u>

Sei $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(x)$ Wronski-Matrix von $\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\vec{y}$ und $W(x) = \det \mathbf{Y}(x)$ ihre Determinante.
Dann ist $W(x)$ differenzierbar und mit $\mathrm{spur}\mathbf{A} := a_{11} + \ldots + a_{nn}$ gilt
$W'(x) = \mathrm{spur}\mathbf{A}(x)\, W(x)$ bzw $W(x) = W(x_0)\, \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{spur}\mathbf{A}(t)\, dt \right)$.

Folgerungen

1) Seien $C_1, \ldots, C_m \in \mathbb{K}$ und $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ Lösungen des homogenen Systems (5). Dann gilt

$$C_1\, \vec{y}_1 + \ldots + C_m\, \vec{y}_m \equiv 0 \iff C_1\, \vec{y}_1(x_0) + \ldots + C_m\, \vec{y}_m(x_0) = \vec{0} \text{ für ein } x_0 \in I \ .$$

2) Sei $x_0 \in I$ und $\mathbf{Y}_0(x)$ die (eindeutig bestimmte) Fundamentalmatrix des homogenen Systems (5) mit $\mathbf{Y}_0(x_0) = \mathbf{E} =$ Einheitsmatrix.

   Dann ist $\vec{y}\,(x) := \mathbf{Y}_0(x)\, \vec{y}_0$ die eindeutig bestimmte Lösung von (5) mit $\vec{y}\,(x_0) = \vec{y}_0$.

   Für jede Lösungsmatrix $\mathbf{Y}(x)$ gilt $\mathbf{Y}(x) = \mathbf{Y}_0(x)\ \mathbf{Y}(x_0)$.
3) Sei $\mathbf{Y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ eine Fundamentalmatrix und $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ konstant.

   Dann ist $\mathbf{YC}$ Lösungsmatrix und jede Lösungsmatrix ist von dieser Form.
4) Ist $\mathbf{Y}$ Fundamentalmatrix, $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ konstant und regulär, so ist auch $\mathbf{YC}$ Fundamentalmatrix.

In bestimmten Fällen erhält man Fundamentalmatrizen mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion.

<u>*Exponentiallösung des homogenen Systems*</u>

Sei $\mathbf{B}\colon I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ derart, daß $\mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{B}'(x) = \mathbf{B}'(x) \cdot \mathbf{B}(x)$. Dann ist $\mathbf{Y} = \mathrm{e}^{\mathbf{B}}$ Fundamentalmatrix des homogenen Systems $\vec{y}\,' = \mathbf{B}'(x)\, \vec{y}$.

Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ konstant, so erfüllt $\mathbf{B}(x) := \mathbf{A}x$ die Voraussetzungen dieses Satzes. Es ist $\mathbf{B}'(x) = \mathbf{A}$. Also ist $\mathbf{Y} := \mathrm{e}^{\mathbf{A}x}$ Fundamentalmatrix des Systems $\vec{y}\,' = \mathbf{A}\vec{y}$.

Für die Lösung konkreter Systeme mit konstanten Koeffizienten gibt es aber geeignetere Verfahren (siehe 5.2.5).

5.2.4 Reduktionsverfahren von d'Alembert

Sei $\vec{u} = \vec{u}\,(x)$, $\vec{u}\colon I \to \mathbb{K}^n$, eine spezielle nicht-triviale Lösung des homogenen Systems (5) $\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\,\vec{y}$.
Sei o.B.d.A. die 1. Koordinate $u_1 \neq 0$. Der d'Alembertsche Reduktionsansatz zur Bestimmung weiterer Lösungen lautet dann

$$\vec{y}(x) \;=\; \vec{u}(x)\,p(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{z}(x) \end{pmatrix} \tag{6}$$

mit noch zu bestimmenden Hilfsfunktionen $p\colon I \to \mathbb{K}$, $\vec{z}\colon I \to \mathbb{K}^{n-1}$. Einsetzen in das System (5) führt auf ein Differentialgleichungssystem für p und $\vec{z}$, in dem p rausfällt (aber nicht p').

Die erste Gleichung kann man nach p' auflösen, in den Rest einsetzen und erhält so ein lineares homogenes System $(*)$ der Ordnung $n-1$ für $\vec{z} = \vec{z}\,(x)$.

Hat man eine Lösung $\vec{z}$ von $(*)$, so muß man rückwärts das zugehörige $p'(x)$ berechnen, dies integrieren und erhält so aus dem Ansatz (6) eine Lösung $\vec{y}$ von (5). Ein Fundamentalsystem von $(*)$ liefert auf diese Weise zusammen mit der vorgegebenen speziellen Lösung $\vec{u}$ ein Fundamentalsystem von (5).

Kennt man zu Beginn bereits mehrere linear unabhängige Lösungen von (5), etwa k Lösungen, so kann man mit einem analogen Ansatz die Systemordnung in einem Schritt auf $n-k$ reduzieren.

Genauer: Seien $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ linear unabhängige Lösungen von (5) derart, daß die Untermatrix $\begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k,1} & \cdots & y_{k,k} \end{pmatrix}$ regulär ist. Dann macht man den Ansatz

$$\vec{y}(x) \;=\; \sum_{j=1}^{k} \vec{y}_j(x)\,p_j(x) + \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{z}(x) \end{pmatrix} \tag{7}$$

mit noch zu bestimmenden Hilfsfunktionen $p_j\colon I \to \mathbb{K}$, $\vec{z}\colon I \to \mathbb{K}^{n-k}$. Einsetzen in das System (5) führt auf ein Differentialgleichungssystem für die p_j und $\vec{z}$, in dem die p_j rausfallen, aber nicht die Ableitungen p_j'. Die ersten k Gleichungen kann man nach den p_j' auflösen, in den Rest einsetzen und erhält so ein lineares homogenes System der Ordnung $n-k$ für $\vec{z} = \vec{z}\,(x)$. Usw.

Beispiel:

$\vec{u}\,(x) := \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$ ist eine spezielle Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1/x & -1 \\ 1/x^2 & 2/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;. \tag{8}$$

$\vec{y} = \vec{u}\,(x)\,p(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ z(x) \end{pmatrix}$ ist der Reduktionsansatz für ein System 2. Ordnung, falls die erste Koordinate $u_1 \neq 0$ ist. Einsetzen liefert das System

$$x^2\,p' \;=\; -z \qquad ; \qquad -x\,p' + z' \;=\; \frac{2}{x}\,z\ . \tag{9}$$

Die erste Gleichung in die zweite eingesetzt ergibt $xz' = z$. Diese lineare Gleichung 1. Ordnung besitzt $z(x) = x$ als Basislösung.

Aus der 1. Gleichung von (9) erhält man rückwärts $p' = -1/x$,
$p(x) = -\ln x$ und damit $\vec{y}(x) := \begin{pmatrix} -x^2 \ln x \\ x\,(\ln x + 1) \end{pmatrix}$ als eine weitere Lösung des Ausgangssystems (8) im Intervall $]0, \infty[$.
$\vec{y}$ und $\vec{u}$ bilden zusammen ein Fundamentalsystem.

In Aufgabe 12.2.B wird das System durch Umwandlung in eine Gleichung 2. Ordnung gelöst.

5.2.5 Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten sind spezielle *autonome Systeme* (siehe Abschnitt 4.2). Wir verwenden t als unabhängige Variable, schreiben $\dot{\vec{x}}\,(t) = \dfrac{d}{dt}\,\vec{x}\,(t)$ und betrachten das homogene System

$$\dot{\vec{x}} \;=\; \mathbf{A}\vec{x}\ , \tag{10}$$

wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine konstante Matrix ist.

Derartige Anfangswertprobleme sind wie alle linearen AWP's eindeutig lösbar. Wie für beliebige homogene Systeme gilt auch hier, daß die $\mathbb{K}^n$–wertigen Lösungen einen n–dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bilden. Die maximal fortgesetzten Lösungen sind im ganzen Grundintervall, hier also in ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Bei konstanter Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ kann man zusätzlich zeigen:

Satz:
1) $\mathbf{X} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ ist eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems (10), d.h. die Spalten von $\mathbf{X} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ bilden eine Basis des Lösungsraums.
2) Für $(t_0, \vec{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ist $\vec{x}\,(t) := \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\,\vec{x}_0$ die eindeutig bestimmte Lösung von (10) mit $\vec{x}\,(t_0) = \vec{x}_0$.

Für praktische Zwecke ist die Matrizen-Exponentialfunktion zur Bestimmung von Lösungen kaum zu gebrauchen. Geeigneter ist dafür die *Laplace-Transformation* (siehe Abschnitt 6) und die *Eigenwertmethode*. Bei Systemen niedriger Ordnung kann man auch zu einer äquivalenten Gleichung entsprechender Ordnung übergehen, die meist bequemer zu lösen ist *(Eliminationsmethode)*. Siehe z.B. Aufgabe 12.2.B.

Kochrezept (Eigenwertmethode)

Gesucht ist eine Lösungsbasis für das System $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x}$ mit konstanter Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathrm{I\!K}^{n \times n}$.

1) Bestimme die Eigenwerte λ_ν von $\mathbf{A}$ und ihre Vielfachheiten m_ν, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$.
2) Zu jedem Eigenwert λ der Vielfachheit m bestimme man m linear unabhängige Lösungen der Form $\vec{p}_j(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ mit Vektorpolynomen $\vec{p}_j(t)$ vom Grad $\le j$ $(j = 0, \ldots, m-1)$.
3) Das so bestimmte Fundamentalsystem ist i.a. komplex. Ist die Matrix $\mathbf{A}$ reell, so liefern Real- und Imaginärteile eines komplexen Fundamentalsystems ein reelles Fundamentalsystem.

Zu 1): Über $\mathbb{C}$ zerfällt das charakteristische Polynom völlig in Linearfaktoren. Die Bestimmung der Nullstellen ist aber ein numerisches Problem, auf das wir nicht eingehen können. Die Summe der Vielfachheiten ist $\sum m_\nu = n$.

Zu 2): Man wird zu jedem Eigenwert λ zunächst zugehörige Eigenvektoren $\vec{c} \in \mathrm{I\!K}^n$ bestimmen. Es gilt nämlich:

Satz:
$\vec{x} = \vec{c}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ mit konstantem Vektor $\vec{c} \in \mathrm{I\!K}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ist genau dann Lösung von (10), wenn $\vec{c}$ Eigenvektor der Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ ist.

Wenn man Glück hat, so ist $\mathbf{A}$ diagonalisierbar, d.h. zu jedem Eigenwert λ der Vielfachheit m existieren m linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{c}_j$. In diesem Fall bilden die entsprechenden Lösungen $\vec{x} = \vec{c}_j\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ bereits ein Fundamentalsystem.

Ist die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ nicht diagonalisierbar, muß man sich mehr anstrengen. Gibt es zum Eigenwert λ der Vielfachheit m nur $k < m$ linear unabhängige Eigenvektoren, so müssen noch $m-k$ weitere Basislösungen der Form $\vec{p}_j(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ mit Vektorpolynomen $\vec{p}_j$ gefunden werden. Zunächst wird man solche mit Grad 1, dann mit Grad 2 usw bestimmen, bis man insgesamt m Basislösungen hat.

Man macht dafür einen Ansatz mit unbestimmten (Vektor-) Koeffizienten, setzt ihn in das homogene System ein und berechnet die Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich.

Evt hilft auch die Theorie der *Jordanschen Normalform* (siehe z.B. [RA2], Kap. 3). Ist z.B. $\vec{d} \in \mathrm{I\!K}^n$ ein Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert λ, so ist $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{d} =: \vec{c}$ ein Eigenvektor und $(\vec{c}t + \vec{d})\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ ist Lösung des gegebenen Systems. Man rechne dies nach!

Zu 3): Ist $\mathbf{A}$ reell, so treten die echt komplexen Eigenwerte von $\mathbf{A}$ in konjugiert komplexen Paaren mit gleicher Vielfachheit auf. Konjugiert komplexe Eigenwerte λ und $\overline{\lambda}$ besitzen konjugiert komplexe Eigenvektoren und liefern konjugiert komplexe Basislösungen. Für ein reelles Fundamentalsystem reichen Real- und Imaginärteil der zu λ gehörenden Basislösungen.

Ist $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein echt komplexer Eigenwert, so kann man die zugehörigen reellen Basislösungen aber auch rein reell mit dem Ansatz

$$\vec{x} \;=\; \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\vec{p}_j(t)\cos\beta t + \vec{q}_j(t)\sin\beta t\right)$$

bestimmen mit reellen vektorwertigen Polynomen $\vec{p}_j$ und $\vec{q}_j$.

Zusammengefaßt steckt dieses Kochrezept in den folgenden beiden Sätzen. Zum Beweis braucht man Ergebnisse über die Jordansche Normalform einer quadratischen Matrix aus $\mathbb{K}^{n\times n}$ und natürlich auch die Tatsache, daß eine komplexe $n \times n$–Matrix n nicht notwendig verschiedene komplexe Eigenwerte hat (mit Vielfachheit gezählt).

Komplexe Fundamentalsysteme für Systeme mit konstanten Koeffizienten

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und λ_ν $(\nu = 1,\ldots,r)$ die verschiedenen, i.a. komplexen Eigenwerte von $\mathbf{A}$ jeweils mit der Vielfachheit m_ν.
Dann existiert ein Fundamentalsystem von (10) bestehend aus
$n = m_1 + \ldots + m_r$ linear unabhängigen Lösungen der Form

$$\vec{x}_{\nu,j} \;=\; \mathrm{e}^{\lambda_\nu t}\,\vec{p}_{\nu,j}(t)\ , \quad j = 0,\ldots,m_\nu - 1\ ,\ \nu = 1,\ldots,r\ .$$

Dabei sind die $\vec{p}_{\nu,j}(t)$ vektorwertige Polynome vom Grad $\leq j$. Sie können bei reellem $\mathbf{A}$ und λ_ν reell gewählt werden.

Reelle Fundamentalsysteme für Systeme mit konstanten Koeffizienten

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine konstante reelle Matrix, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ die verschiedenen reellen und $\lambda_{k+1} = \alpha_{k+1} + i\beta_{k+1},\ldots,\lambda_s$, $\overline{\lambda_{k+1}},\ldots,\overline{\lambda_s} = \alpha_s - i\beta_s$ die verschiedenen echt komplexen Eigenwerte von $\mathbf{A}$, jeweils mit der Vielfachheit m_ν.
Dann existiert ein reelles Fundamentalsystem von (10) der Form:

$$\mathrm{e}^{\lambda_\nu t}\,\vec{p}_{\nu,j}(t) \qquad (0 \leq j < m_\nu\ ;\ 1 \leq \nu \leq k)$$

$$\mathsf{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda_\mu t}\,\vec{p}_{\mu,j}(t)\right)\ ,\ \mathsf{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda_\mu t}\,\vec{p}_{\mu,j}(t)\right) \quad (0 \leq j < m_\mu\ ; k < \mu \leq s)$$

Dabei sind die $\vec{p}_{\nu,j}(x)$ vektorwertige Polynome vom Grad $\leq j$ und reell für $\nu = 1,\ldots,k$.
Man kann ein derartiges reelles Fundamentalsystem aus einem komplexen durch Übergang zu Real- und Imaginärteil erhalten.

Beispiele in Abschnitt 12.3.

Stabilitätsaussagen für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten finden Sie in Abschnitt 7.2.a.

Zu Phasenräumen linearer autonomer Systeme 2. Ordnung siehe Aufgabe 11.5.B.

5.2.6 Inhomogene Systeme

Wir betrachten wiederum das lineare System

$$\vec{y}\,' \;=\; \mathbf{A}(x)\,\vec{y} + \vec{b}\,(x) \tag{11}$$

und das zugehörige homogene System

$$\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\,\vec{y}\;. \tag{12}$$

Kennt man den Lösungsvektorraum des homogenen Systems (12), so muß man auf Grund des Struktursatzes aus 5.2.1 nur noch eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems finden. Denn jede Lösung von (11) ist von der Form

$$\vec{y} \;=\; \vec{y}_s \;+\; \vec{y}_h\;,$$

wobei $\vec{y}_s$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (11) und $\vec{y}_h$ eine beliebige Lösung des homogenen Systems (12) ist.

Möglichkeiten, eine solche spezielle Lösung $\vec{y}_s$ zu finden, sind u.a. die Variation der Konstanten, spezielle Rateansätze und bei konstanten Koeffizienten die Laplace-Transformation.

a) Variation der Konstanten (VdK)

Die sog. *Variation der Konstanten* liefert stets bis auf Integration eine spezielle Lösung.

Ist $\mathbf{Y}(x) = \big(\vec{y}_1\,(x), \ldots, \vec{y}_n\,(x)\big)$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems (12), so erhält man eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (11) durch den Ansatz

$$\vec{y} \;=\; \vec{y}_s(x) \;=\; \mathbf{Y}(x)\,\vec{C}\,(x) \;=\; C_1(x)\vec{y}_1\,(x) + \ldots + C_n(x)\vec{y}_n\,(x)\;. \tag{13}$$

Einsetzen liefert $\mathbf{Y}(x)\,\vec{C}' = \vec{b}(x)$ bzw $\vec{C}' = \mathbf{Y}^{-1}\,\vec{b}$.

$\mathbf{Y}$ ist eine Fundamentalmatrix, also invertierbar.

Man erhält $\vec{C}(x) = \displaystyle\int \mathbf{Y}^{-1}(x)\,\vec{b}\,(x)\,dx$ und damit die spezielle Lösung

$$\vec{y}_s(x) \;=\; \mathbf{Y}(x)\,\int_{x_0}^{x} \mathbf{Y}^{-1}(\xi)\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi\;.$$

Ist die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ konstant, so ist $\mathbf{Y} := \mathrm{e}^{\mathbf{A}x}$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems. Variation der Konstanten liefert daher für konstante Matrizen **A** die spezielle Lösung

$$\vec{y}_s\,(x) \;=\; \mathrm{e}^{\mathbf{A}x} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\mathbf{A}\xi}\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi \;=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(x-\xi)}\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi\ .$$

$\vec{y}\,(x) \;=\; \mathrm{e}^{\mathbf{A}(x-x_0)}\,\vec{y}_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(x-\xi)}\,\vec{b}\,(\xi)\,d\xi$ ist dann die eindeutig bestimmte spezielle Lösung mit $\vec{y}\,(x_0) = \vec{y}_0$.

b) Spezielle Ansätze für die inhomogene Lösung

Die Variation der Konstanten führt prinzipiell stets zum Ziel, ist in der Praxis aber recht aufwendig. Beispiele siehe Aufgabe 12.2. Man ist daher für einfachere Methoden dankbar. Manchmal führen geeignete *Rateansätze* zum Ziel. Für spezielle Störglieder und konstante Matrizen **A** gibt es Rateansätze, die immer funktionieren:

Ist bei dem System (11) die Koeffizientenmatrix **A** konstant und die Störfunktion von der Form

$$\vec{b}\,(x) = \vec{p}\,(x)\ \mathrm{e}^{\lambda x}\ ,$$

mit einem vektorwertigen Polynom $\vec{p}\,(x)$, so existiert eine spezielle Lösung der Form

$$\vec{y}_s(x) \;=\; \vec{q}\,(x)\ \mathrm{e}^{\lambda x}$$

mit einem vektorwertigen Polynom $\vec{q}\,(x)$. Der Grad von $\vec{q}$ hängt davon ab, ob *Resonanz* vorliegt oder nicht.

Man sagt, daß in dem System *m-fache Resonanz* vorliegt, wenn der Koeffizient λ im Exponenten des Störglieds $\vec{b}\,(x) = \vec{p}\,(x)\ \mathrm{e}^{\lambda x}$ ein m–facher Eigenwert von **A** ist.

Ist der Grad von $\vec{p}\,(x)$ gleich k und liegt m-fache Resonanz vor, so gibt es eine spezielle Lösung der Form $\vec{y}_s(x) \;=\; \vec{q}\,(x)\ \mathrm{e}^{\lambda x}$ mit Grad $\vec{q} \le m + k$.

Ist die Störfunktion Summe von solchen speziellen Störgliedern, so kommt man mit der Summe der entsprechenden Ansätze weiter (*Superpositionsprinzip*).

Ist die Matrix **A** reell und die Störfunktion von der Form

$$\vec{b}\,(x) \;=\; \mathsf{Re}\,\left[\vec{p}\,(x)\ \mathrm{e}^{\lambda x}\right] \;=\; \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\vec{r}(x)\cos\beta x - \vec{s}\,(x)\sin\beta x\right)\ ,$$

so kann man zunächst eine spezielle Lösung des Systems mit der komplexen Störfunktion $\vec{b}\,(x) = \vec{p}\,(x)\ \mathrm{e}^{\lambda x}$ bestimmen und von dieser komplexen Lösung den Realteil nehmen. Dabei sei $\vec{p} = \vec{r} + i\vec{s}$ und $\lambda = \alpha + i\beta$ die übliche Zerlegung in Real- und Imaginärteil, $\vec{p}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ komplexe bzw reelle vektorwertige Polynome.

Man kann auch rein reell rechnen und bei Störgliedern der Form
$\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\vec{r}\,(x)\cos\beta x + \vec{s}\,(x)\sin\beta x\right)$ mit dem Ansatz $\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\vec{u}\,(x)\cos\beta x + \vec{v}\,(x)\sin\beta x\right)$ in die inhomogene Gleichung gehen. Für den Grad von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist wiederum wesentlich, ob Resonanz vorliegt oder nicht.

Beispiele siehe Aufgabe 12.3.B.