

## 12.6 Aufgaben zur Laplace-Transformation

**A** Man löse die folgenden Anfangswertprobleme durch Laplace-Transformation:

- 1)  $\ddot{x} - \dot{x} - x = 0$  ;  $x(0) = \dot{x}(0) = 1$
- 2)  $x^{(3)} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = e^{2t}$  ;  $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$
- 3)  $\ddot{x} + 4x = H(t - \pi)$  ;  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

**B** Man löse die folgenden Systeme durch Laplace-Transformation:

- 1)  $\begin{cases} \dot{x} + 2y = e^t \\ \dot{y} + 2x = e^{-t} \end{cases}$  ;  $x(0) = y(0) = 0$
- 2)  $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{y} + 3x = 1 \\ \ddot{y} - 4\dot{x} + 3y = 0 \end{cases}$  ;  $x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$

**C** Man löse die Euler-Gleichung  $t\ddot{x} - \dot{x} = 0$  durch Laplace-Transformation.

**D** Sei  $f: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar und höchstens von exponentiellem Wachstum. D.h. es gibt Konstanten  $M, k \in \mathbb{R}$  mit  $|f(t)| \leq M e^{kt}$  für alle  $t$  ab einem  $T > 0$ . Man beweise:

- 1)  $f(t)$  ist L-transformierbar und das Laplace-Integral konvergiert für  $s > k$  absolut.
- 2) Konvergiert das Laplace-Integral für  $s_0$  absolut, so konvergiert es im Intervall  $[s_0, \infty[$  gleichmäßig.
- 3) Die L-Transformierte von  $f(t)$  strebt gegen 0 für  $s \rightarrow \infty$ .

**E** *Laplace-Transformation periodischer Funktionen:*

Sei  $f: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  L-transformierbar und periodisch mit der Periode  $T > 0$ .

Zeigen Sie, daß dann  $L\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ .

**F** Beweisen Sie den Differentiationssatz 6.2.(8).

Finden Sie außerdem ein Beispiel einer L-transformierbaren Funktion  $f(t)$ , deren Ableitung nicht L-transformierbar ist.

**G** *Grenzwerte von Bild und Urbild:*

Sei  $f(t)$  für  $t > 0$  differenzierbar. Man beweise:

- 1) Ist  $f'(t)$  L-transformierbar, so gilt  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) =: f(0+)$ .
- 2) Ist  $f'(t)$  in  $[0, \infty[$  absolut integrierbar, so gilt  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

$$\boxed{\text{H}} \quad \text{Sei } f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < \ln \ln 3 \\ (-1)^n e^{t/2} & \text{für } \ln \ln n \leq t < \ln \ln(n+1) \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß das Laplace-Integral  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  konvergiert und für alle  $s \in \mathbb{R}$  absolut divergiert.

**Lösungen:**

$\boxed{\text{A}}$  Zur Laplace-Transformation siehe Abschnitt 6. Eine kleine Tabelle von L-Transformierten finden Sie im Anhang.

$$\boxed{\text{A.1}} \quad \ddot{x} - \dot{x} - x = 0 \quad ; \quad y(0) = \dot{x}(0) = 1$$

Laplace-Transformation liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x} - \dot{x} - x\} &= \mathcal{L}\{\ddot{x}\} - \mathcal{L}\{\dot{x}\} - \mathcal{L}\{x\} \\ &= (s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) - (sX(s) - x(0)) - X(s) \\ &= (s^2 - s - 1)X(s) - s = 0. \end{aligned}$$

Mit  $a_1 := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  und  $a_2 := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  gilt  $s^2 - s - 1 = (s - a_1)(s - a_2)$ . Auflösen nach  $X(s)$  und Rücktransformation nach Tabelle liefert:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s}{s^2 - s - 1} = \frac{s}{(s - a_1)(s - a_2)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})}_{=: A_1} \frac{1}{s - a_1} + \underbrace{\frac{1}{10}(5 - \sqrt{5})}_{=: A_2} \frac{1}{s - a_2} \\ x(t) &= A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t}. \end{aligned}$$

Hier gibt es übrigens einen Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen  $F_k$  (siehe z.B. [RA 1, 4.4.6.E]). Für die Lösung  $x(t)$  gilt  $\ddot{x} = \dot{x} + x$ .  $n$ -maliges Differenzieren liefert  $x^{(n+2)} = x^{(n+1)} + x^{(n)}$ . Wegen  $x(0) = \dot{x}(0) = 1$  folgt  $F_k = x^{(k)}(0)$ . Andererseits ist  $x^{(k)}(t) = A_1 a_1^k e^{a_1 t} + A_2 a_2^k e^{a_2 t}$  und daher

$$F_k = x^{(k)}(0) = A_1 a_1^k + A_2 a_2^k.$$

$$\boxed{\text{A.2}} \quad x^{(3)} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = e^{2t} \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$$

Es sind homogene Anfangsbedingungen gegeben. L-Transformation liefert:

$$\begin{aligned} s^3 X(s) - 6s^2 X(s) + 12s X(s) - 8X(s) &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\ (s - 2)^3 X(s) &= \frac{1}{s - 2} \quad ; \quad X(s) = \frac{1}{(s - 2)^4} \\ x(t) &= \frac{1}{3!} t^3 e^{2t}. \end{aligned}$$

$$(A.3) \quad \boxed{\ddot{x} + 4x = H(t - \pi) \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0}$$

Dabei ist  $H(t)$  die Heaviside-Funktion. Laplace-Transformation nach Tabelle und Verschiebungssatz ergibt

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+4} e^{-\pi s} \\ x(t) &= \frac{1 - \cos 2(t-\pi)}{4} H(t - \pi) = \frac{\sin^2 t}{2} H(t - \pi) . \end{aligned}$$

$$(B) \quad (B.1) \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{x} + 2y &= e^t \\ \dot{y} + 2x &= e^{-t} \quad ; \quad x(0) = y(0) = 0 \end{aligned}}$$

Wegen der homogenen Anfangsbedingungen ergibt Laplace-Transformation das System

$$\begin{aligned} sX(s) + 2Y(s) &= \mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1} \\ 2X(s) + sY(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Auflösen und Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^2 - s + 2}{(s^2 - 1)(s^2 - 4)} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s-2} \right) \\ Y(s) &= \frac{s^2 - 3s - 2}{(s^2 - 1)(s^2 - 4)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s-2} \right) \end{aligned}$$

Rücktransformation liefert die Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3} (2e^{-t} - e^t - 2e^{-2t} + e^{2t}) \\ y(t) &= \frac{1}{3} (e^{-t} + 2e^t - 2e^{-2t} - e^{2t}) . \end{aligned}$$

$$(B.2) \quad \boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{y} + 3x &= 1 \\ \ddot{y} - 4\dot{x} + 3y &= 0 \quad ; \quad x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{aligned}}$$

Laplace-Transformation ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (s^2 + 3)X(s) + sY(s) &= \frac{1}{s} \\ -4sX(s) + (s^2 + 3)Y(s) &= 0 \end{aligned}$$

Auflösung, Partialbruchzerlegung und Rücktransformation liefert

$$X(s) = \frac{s^2 + 3}{s(s^2 + 9)(s^2 + 1)} = \frac{1/3}{s} - \frac{s/12}{s^2 + 9} - \frac{s/4}{s^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{4}{(s^2+9)(s^2+1)} = -\frac{1/2}{s^2+9} + \frac{1/2}{s^2+1} \\
x(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \cos 3t - \frac{1}{4} \cos t \\
y(t) &= -\frac{1}{6} \sin 3t + \frac{1}{2} \sin t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{C}} \quad \boxed{t\ddot{x} - \dot{x} = 0}$$

L-Transformation liefert mit Regeln (6.2.10) und (6.2.9)

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\ddot{x}\} - \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= -\frac{d}{ds} (s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) - (sX(s) - x(0)) \\
&= -2sX(s) - s^2 X'(s) + x(0) - sX(s) + x(0) \\
&= -3sX(s) - s^2 X'(s) + 2x(0) = 0
\end{aligned}$$

Diese lineare Differentialgleichung für  $X(s)$  besitzt die allgemeine Lösung

$$X(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{C}{s^3} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Rücktransformation liefert die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung

$$x(t) = x(0) + \frac{C}{2} t^2 .$$

Man hätte diese Dgl natürlich auch anders lösen können, etwa als Euler-Dgl oder durch Reduktion auf eine lineare Dgl 1. Ordnung mit Hilfe der Substitution  $u(t) := \dot{x}(t)$ .

$\boxed{\text{D}}$  Nach Voraussetzung ist  $f: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar und es gibt Konstanten  $M, k \in \mathbb{R}$  mit  $|f(t)| \leq M e^{kt}$  für alle  $t$  ab einem  $T > 0$ .

**(D.1)** Für  $s > k$  gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt &\leq \int_0^T e^{-st} |f(t)| dt + M \int_T^\infty e^{-st} e^{kt} dt \\
&\leq \int_0^T |f(t)| dt + \frac{M}{k-s} < \infty .
\end{aligned}$$

Beachte, daß  $f(t)$  in endlichen Intervallen  $[0, T]$  absolut integrierbar ist. Also ist das Laplace-Integral von  $f(t)$  für  $s > k$  absolut konvergent und die L-Transformierte  $F(s)$  von  $f(t)$  existiert mindestens im Intervall  $]k, \infty[$ .

**(D.2)** Sei  $f(t)$  L-transformierbar und das Laplace-Integral von  $f(t)$  konvergiere für  $s = s_0$  absolut.

Dann gibt es zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $T_0 > 0$  mit  $\int_T^\infty e^{-s_0 t} |f(t)| dt < \varepsilon$  für alle  $T > T_0$ . Dann gilt für alle  $s > s_0$ ,  $T > T_0$ :

$$\left| \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt \right| < \int_T^\infty e^{-s_0 t} |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Also konvergiert das L-Integral von  $f(t)$  gleichmäßig im Intervall  $[s_0, \infty[$ .

Das Resultat gilt unter schwächeren Voraussetzungen (siehe Doetsch).

**(D.3)** Für  $s > s_0$  zerlegen wir das L-Integral von  $f(t)$  in

$$F(s) = \int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) dt + \int_{T_2}^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  wähle man  $T_1 > 0$  so klein, daß für  $s \geq 0$  gilt

$$\left| \int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{T_1} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nach Teil (D.2) kann man  $T_2 > T_1$  so groß wählen, daß für  $s > s_0$

$$\left| \int_{T_2}^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Schließlich wähle man  $s_1 > s_0$  so groß, daß für  $s \geq s_1$  gilt

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) dt \right| \leq e^{-s_1 T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also ist  $|F(s)| < \varepsilon$  für  $s > s_1$ .

**E** *Laplace-Transformation periodischer Funktionen:*

Sei  $f: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  L-transformierbar und periodisch mit der Periode  $T > 0$ .

Sei  $f(t) \equiv 0$  für  $t < 0$ . Nach dem Verschiebungssatz 6.2.(4) ist dann mit  $f(t)$  auch  $f(t - T)$  transformierbar und es gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad \implies \quad \mathcal{L}\{f(t - T)\} = e^{-Ts} F(s).$$

Nun ist  $f(t) - f(t - T) = \begin{cases} f(t) & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{für } t \geq T \end{cases}$  und daher

$$(1 - e^{-Ts}) F(s) = \mathcal{L}\{f(t) - f(t - T)\}(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Die Behauptung folgt.

**F** *Beweis des Differentiationssatzes:*

Sei  $f(t)$  im Intervall  $]0, \infty[$  differenzierbar und die Ableitung  $f'(t)$  L-transformierbar. Nach Definition ist dann  $f'(t)$  in jedem endlichen Intervall  $[0, T]$  (sogar absolut) integrierbar und es gilt

$$\int_0^T f'(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^T f'(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(T) - f(\varepsilon) = f(T) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon).$$

Also existiert der Grenzwert  $f(0^+) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ .

Setzt man voraus, daß  $f(t)$  höchstens exponentielles Wachstum hat, so folgt für alle hinreichend großen  $s$  mit partieller Integration:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \underbrace{e^{-st} f(t) \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty}}_{=0} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Allgemeiner kann man so schließen:

Sei  $s > 0$  und das L-Integral  $\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$  der Ableitung konvergent.

Sei  $\psi(x) := \int_0^x e^{-st} f(t) dt$ ,  $g(x) := e^{sx} \psi(x)$  und  $h(x) := e^{sx}$ .

Zu zeigen ist: Der Grenzwert  $F(s) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)}$  existiert und es gilt  $sF(s) + f(0^+) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$ .

$\psi$ ,  $g$  und  $h$  sind differenzierbar, denn  $f$  ist stetig. Es gilt  $h'(x) \neq 0$  und  $h(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{g'(x)}{h'(x)} &= \frac{1}{s} [s\psi(x) + \psi'(x)] = \frac{1}{s} \left[ s \int_0^x e^{-st} f(t) dt + e^{-sx} f(x) \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[ -e^{-st} f(t) \Big|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x e^{-st} f'(t) dt + e^{-sx} f(x) \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[ \int_0^x e^{-st} f'(t) dt + f(0^+) \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{s} \left[ \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt + f(0^+) \right]. \end{aligned}$$

l'Hospital liefert die Behauptung.

Zusätzlich erhält man  $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} f(x) = 0$ . Unter den gemachten Voraussetzungen kann also  $f(t)$  nur von höchstens exponentiellem Wachstum sein.

*Beispiel 1:*  $f(t) := \ln t$  ist L-transformierbar, denn  $f(t)$  ist in jedem endlichen Intervall  $[0, T]$  absolut integrierbar und der Logarithmus wächst nicht mal linear, geschweige denn exponentiell.

Die Ableitung  $f'(t) = 1/t$  ist nicht L-transformierbar, da das uneigentliche Integral  $\int_0^1 e^{-st}/t dt$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  divergiert.

*Beispiel 2:* Für  $f(t) := 1 - e^{-t}$  ist  $f'(t) = e^{-t}$ . Das Laplace-Integral von  $f'(t)$  konvergiert für  $s > -1$ , das L-Integral von  $f(t)$  nur für  $s > 0$ .

*Beispiel 3:* Für  $f(t) := e^t \sin t^2$  ist  $f'(t) = e^t (\sin t^2 + 2t \cos t^2)$ . Das Laplace-Integral von  $f(t)$  konvergiert für  $s = 1$ , das L-Integral von  $f'(t)$  divergiert für  $s = 1$ .

*Beispiel 4:* Für  $f(t) := e^{e^t} \sin e^t$  ist  $f'(t) = e^t e^{e^t} (\sin e^t + e^{e^t} \cos e^t)$ . Das Laplace-Integral von  $f(t)$  konvergiert für  $s > -1$ , das L-Integral von  $f'(t)$  divergiert für alle  $s$ .

**G** Grenzwerte von Bild und Urbild:

$f(t)$  erfüllt in beiden Aussagen die Voraussetzungen des Differentiationssatzes 6.2.(8). Insbesondere existiert  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) =: f(0^+)$  und es ist

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = sF(s) - f(0^+). \quad (1)$$

Nach Aufgabe 12.6.D.3 gilt  $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow \infty$ . Also folgt die Behauptung (G.1):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) =: f(0^+).$$

Existiert zusätzlich das Laplace-Integral  $\int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$  für  $s = 0$ , so existiert der Grenzwert

$$f(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(\tau) d\tau.$$

Nach dem Differentiationssatz konvergiert das Laplace-Integral  $F(s)$  von  $f(t)$  für  $s > 0$ . Nach Aufgabe 12.6.D.2 konvergiert das Laplace Integral von  $f'(t)$  für  $s \geq 0$  sogar gleichmäßig. Man kann in Gleichung (1) den Limes für  $s \rightarrow 0^+$  mit dem Integral vertauschen und erhält

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \int_0^\infty f'(t) dt = f(\infty) - f(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) - f(0^+).$$

Also wie behauptet  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

$$\boxed{\text{H}} \quad \text{Sei } f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < \ln \ln 3 \\ (-1)^n e^{t/2} & \text{für } \ln \ln n \leq t < \ln \ln(n+1) \quad (n \geq 3) \end{cases} .$$

Das Laplace-Integral von  $f(t)$  ist sicherlich für kein  $s \in \mathbb{R}$  absolut konvergent, denn

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^\infty \exp(-st + e^t/2) dt$$

und es ist  $e^t/2 > -st$  für alle  $t$  ab einem gewissen  $t_0$ .

Zur Untersuchung der einfachen Konvergenz betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_{\ln \ln n}^{\ln \ln(n+1)} \exp(-st + e^t/2) dt \\ &= \int_n^{n+1} \frac{(\ln x)^{-s-1}}{x^{1/2}} dx . \end{aligned}$$

Dabei wurde  $\ln x = e^t$  substituiert. Der Integrand nimmt ab einer Stelle monoton gegen Null ab. Also gilt  $I_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $I_n > I_{n+1}$  ab einem  $n_0$ .

Die alternierende Reihe der Integrale  $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n I_n$  konvergiert daher nach dem

Leibnizkriterium. Dann konvergiert auch das Integral  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ , denn für  $\ln \ln n < u < \ln \ln(n+1)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^u e^{-st} f(t) dt &= \int_0^{\ln \ln n} e^{-st} f(t) dt + \int_{\ln \ln n}^u e^{-st} f(t) dt \\ &= \sum_{k=3}^{n-1} (-1)^k I_k + \int_{\ln \ln n}^u e^{-st} f(t) dt \end{aligned}$$

und das letzte Integral ist betragsmäßig kleiner als  $I_n$ .

Für dies Beispiel ist die Konvergenzabszisse  $\sigma = -\infty$  und die Abszisse der absoluten Konvergenz  $\sigma_a = +\infty$ .