12.6 Aufgaben zur Laplace-Transformation

A Man löse die folgenden Anfangswertprobleme durch Laplace-Transformation:

1) $\ddot{x} - \dot{x} - x \;=\; 0 \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 1$
2) $x^{(3)} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x \;=\; e^{2t} \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$
3) $\ddot{x} + 4x \;=\; H(t-\pi) \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

B Man löse die folgenden Systeme durch Laplace-Transformation:

1) $\begin{array}{rcl} \dot{x} + 2y &=& e^{t} \\ \dot{y} + 2x &=& e^{-t} \end{array} \quad ; \quad x(0) = y(0) = 0$

2) $\begin{array}{rcl} \ddot{x} + \dot{y} + 3x &=& 1 \\ \ddot{y} - 4\dot{x} + 3y &=& 0 \end{array} \quad ; \quad x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$

C Man löse die Euler-Gleichung $t\ddot{x} - \dot{x} = 0$ durch Laplace-Transformation.

D Sei $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar und höchstens von exponentiellem Wachstum. D.h. es gibt Konstanten $M, k \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq M\, e^{kt}$ für alle t ab einem $T > 0$. Man beweise:

1) $f(t)$ ist L-transformierbar und das Laplace-Integral konvergiert für $s > k$ absolut.
2) Konvergiert das Laplace-Integral für s_0 absolut, so konvergiert es im Intervall $[s_0, \infty[$ gleichmäßig.
3) Die L-Transformierte von $f(t)$ strebt gegen 0 für $s \to \infty$.

E *Laplace-Transformation periodischer Funktionen:*

Sei $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ L-transformierbar und periodisch mit der Periode $T > 0$.

Zeigen Sie, daß dann $L\{f(t)\} \;=\; F(s) \;=\; \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$.

F Beweisen Sie den Differentiationssatz 6.2.(8).

Finden Sie außerdem ein Beispiel einer L-transformierbaren Funktion $f(t)$, deren Ableitung nicht L-transformierbar ist.

G *Grenzwerte von Bild und Urbild:*

Sei $f(t)$ für $t > 0$ differenzierbar. Man beweise:

1) Ist $f'(t)$ L-transformierbar, so gilt $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) =: f(0+)$.
2) Ist $f'(t)$ in $[0,\infty[$ absolut integrierbar, so gilt $\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

$\boxed{\text{H}}$ Sei $f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t < \ln\ln 3 \\ (-1)^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t/2} & \text{für} \quad \ln\ln n \le t < \ln\ln(n+1) \ (n \ge 3) \end{cases}$

Zeigen Sie, daß das Laplace-Integral $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt$ für alle $s \in \mathbb{R}$ konvergiert und für alle $s \in \mathbb{R}$ absolut divergiert.

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Zur Laplace-Transformation siehe Abschnitt 6 . Eine kleine Tabelle von L-Transformierten finden Sie im Anhang.

(A.1) $\boxed{\ddot{x} - \dot{x} - x = 0 \quad ; \quad y(0) = \dot{x}(0) = 1}$

Laplace-Transformation liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x} - \dot{x} - x\} &= \mathcal{L}\{\ddot{x}\} - \mathcal{L}\{\dot{x}\} - \mathcal{L}\{x\} \\ &= \big(s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\big) - \big(sX(s) - x(0)\big) - X(s) \\ &= (s^2 - s - 1)\, X(s) - s \ = \ 0 \ . \end{aligned}$$

Mit $a_1 := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $a_2 := \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ gilt $s^2 - s - 1 = (s-a_1)(s-a_2)$. Auflösen nach $X(s)$ und Rücktransformation nach Tabelle liefert:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s}{s^2-s-1} = \frac{s}{(s-a_1)(s-a_2)} \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{10}\,(5+\sqrt{5})}_{=:A_1} \frac{1}{s-a_1} + \underbrace{\tfrac{1}{10}\,(5-\sqrt{5})}_{=:A_2} \frac{1}{s-a_2} \\ x(t) &= A_1\, \mathrm{e}^{a_1 t} + A_2\, \mathrm{e}^{a_2 t} \ . \end{aligned}$$

Hier gibt es übrigens einen Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen F_k (siehe z.B. [RA 1, 4.4.6.E]). Für die Lösung $x(t)$ gilt $\ddot{x} = \dot{x} + x$. n-maliges Differenzieren liefert $x^{(n+2)} = x^{(n+1)} + x^{(n)}$. Wegen $x(0) = \dot{x}(0) = 1$ folgt $F_k = x^{(k)}(0)$. Andererseits ist $x^{(k)}(t) = A_1\, a_1^k\, \mathrm{e}^{a_1 t} + A_2\, a_2^k\, \mathrm{e}^{a_2 t}$ und daher

$$F_k \ = \ x^{(k)}(0) \ = \ A_1\, a_1^k + A_2\, a_2^k \ .$$

(A.2) $\boxed{x^{(3)} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = \mathrm{e}^{2t} \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0}$

Es sind homogene Anfangsbedingungen gegeben. L-Transformation liefert:

$$s^3\, X(s) - 6s^2\, X(s) + 12s\, X(s) - 8\, X(s) \ = \ \mathcal{L}\{\mathrm{e}^{2t}\}$$

$$(s-2)^3\, X(s) \ = \ \frac{1}{s-2} \quad ; \quad X(s) \ = \ \frac{1}{(s-2)^4}$$

$$x(t) \ = \ \frac{1}{3!}\, t^3\, \mathrm{e}^{2t} \ .$$

(A.3) $\boxed{\ddot{x} + 4x = H(t-\pi) \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0}$

Dabei ist $H(t)$ die Heaviside-Funktion. Laplace-Transformation nach Tabelle und Verschiebungssatz ergibt

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s}\,\frac{1}{s^2+4}\,\mathrm{e}^{-\pi s} \\ x(t) &= \frac{1-\cos 2(t-\pi)}{4}\,H(t-\pi) \;=\; \frac{\sin^2 t}{2}\,H(t-\pi)\ . \end{aligned}$$

B **(B.1)** $\boxed{\begin{aligned} \dot{x} + 2y &= \mathrm{e}^{t} \\ \dot{y} + 2x &= \mathrm{e}^{-t} \end{aligned} \quad ; \quad x(0) = y(0) = 0}$

Wegen der homogenen Anfangsbedingungen ergibt Laplace-Transformation das System

$$\begin{aligned} s\,X(s) + 2\,Y(s) &= \mathcal{L}\{\,\mathrm{e}^{t}\} \;=\; \frac{1}{s-1} \\ 2\,X(s) + s\,Y(s) &= \mathcal{L}\{\,\mathrm{e}^{-t}\} \;=\; \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Auflösen und Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^2-s+2}{(s^2-1)(s^2-4)} \;=\; \frac{1}{3}\left(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s-2}\right) \\ Y(s) &= \frac{s^2-3s-2}{(s^2-1)(s^2-4)} \;=\; \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s-2}\right) \end{aligned}$$

Rücktransformation liefert die Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}\left(2\,\mathrm{e}^{-t} - \,\mathrm{e}^{t} - 2\,\mathrm{e}^{-2t} + \,\mathrm{e}^{2t}\right) \\ y(t) &= \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{-t} + 2\,\mathrm{e}^{t} - 2\,\mathrm{e}^{-2t} - \,\mathrm{e}^{2t}\right)\ . \end{aligned}$$

(B.2) $\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{y} + 3x &= 1 \\ \ddot{y} - 4\dot{x} + 3y &= 0 \end{aligned} \quad ; \quad x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0}$

Laplace-Transformation ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (s^2+3)\,X(s) + s\,Y(s) &= \frac{1}{s} \\ -4s\,X(s) + (s^2+3)Y(s) &= 0 \end{aligned}$$

Auflösung, Partialbruchzerlegung und Rücktransformation liefert

$$X(s) \;=\; \frac{s^2+3}{s(s^2+9)(s^2+1)} \;=\; \frac{1/3}{s} - \frac{s/12}{s^2+9} - \frac{s/4}{s^2+1}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{4}{(s^2+9)(s^2+1)} = -\frac{1/2}{s^2+9} + \frac{1/2}{s^2+1} \\
x(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos t \\
y(t) &= -\frac{1}{6}\sin 3t + \frac{1}{2}\sin t
\end{aligned}$$

C $\boxed{t\ddot{x} - \dot{x} = 0}$

L-Transformation liefert mit Regeln (6.2.10) und (6.2.9)

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\ddot{x}\} - \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= -\frac{d}{ds}\big(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\big) - \big(sX(s) - x(0)\big) \\
&= -2sX(s) - s^2X'(s) + x(0) - sX(s) + x(0) \\
&= -3sX(s) - s^2X'(s) + 2x(0) = 0
\end{aligned}$$

Diese lineare Differentialgleichung für $X(s)$ besitzt die allgemeine Lösung

$$X(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{C}{s^3} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Rücktransformation liefert die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung

$$x(t) = x(0) + \frac{C}{2}t^2 .$$

Man hätte diese Dgl natürlich auch anders lösen können, etwa als Euler-Dgl oder durch Reduktion auf eine lineare Dgl 1. Ordnung mit Hilfe der Substitution $u(t) := \dot{x}(t)$.

D Nach Voraussetzung ist $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar und es gibt Konstanten $M, k \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{kt}$ für alle t ab einem $T > 0$.

(D.1) Für $s > k$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,|f(t)|\,dt &\leq \int_0^T \mathrm{e}^{-st}\,|f(t)|\,dt + M\int_T^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{e}^{kt}\,dt \\
&\leq \int_0^T |f(t)|\,dt + \frac{M}{k-s} < \infty .
\end{aligned}$$

Beachte, daß $f(t)$ in endlichen Intervallen $[0,T]$ absolut integrierbar ist. Also ist das Laplace-Integral von $f(t)$ für $s > k$ absolut konvergent und die L-Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ existiert mindestens im Intervall $]k,\infty[$.

(D.2) Sei $f(t)$ L-transformierbar und das Laplace-Integral von $f(t)$ konvergiere für $s = s_0$ absolut.

Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $T_0 > 0$ mit $\displaystyle\int_T^\infty \mathrm{e}^{-s_0 t}\,|f(t)|\,dt < \varepsilon$ für alle $T > T_0$. Dann gilt für alle $s > s_0$, $T > T_0$:

$$\left|\int_T^\infty \mathrm{e}^{-st}\,f(t)\,dt\right| \;<\; \int_T^\infty \mathrm{e}^{-s_0 t}\,|f(t)|\,dt \;<\; \varepsilon\ .$$

Also konvergiert das L-Integral von $f(t)$ gleichmäßig im Intervall $[s_0, \infty[$.

Das Resultat gilt unter schwächeren Voraussetzungen (siehe Doetsch).

(D.3) Für $s > s_0$ zerlegen wir das L-Integral von $f(t)$ in

$$F(s) \;=\; \int_0^{T_1} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt + \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt + \int_{T_2}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt\ .$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man $T_1 > 0$ so klein, daß für $s \geq 0$ gilt

$$\left|\int_0^{T_1} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt\right| \;\leq\; \int_0^{T_1} |f(t)|\,dt \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Nach Teil (D.2) kann man $T_2 > T_1$ so groß wählen, daß für $s > s_0$

$$\left|\int_{T_2}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt\right| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Schließlich wähle man $s_1 > s_0$ so groß, daß für $s \geq s_1$ gilt

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt\right| \;\leq\; \mathrm{e}^{-s_1 T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)|\,dt \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Also ist $|F(s)| < \varepsilon$ für $s > s_1$.

$\boxed{\text{E}}$ *Laplace-Transformation periodischer Funktionen:*

Sei $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ L-transformierbar und periodisch mit der Periode $T > 0$.

Sei $f(t) :\equiv 0$ für $t < 0$. Nach dem Verschiebungssatz 6.2.(4) ist dann mit $f(t)$ auch $f(t-T)$ transformierbar und es gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \;=\; F(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{L}\{f(t-T)\} \;=\; \mathrm{e}^{-Ts} F(s)\ .$$

Nun ist $f(t) - f(t-T) = \begin{cases} f(t) & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{für } t \geq T \end{cases}$ und daher

$$\left(1 - \mathrm{e}^{-Ts}\right) F(s) \;=\; \mathcal{L}\{f(t) - f(t-T)\}(s) \;=\; \int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)\ .$$

Die Behauptung folgt.

$\boxed{\text{F}}$ *Beweis des Differentiationssatzes:*

Sei $f(t)$ im Intervall $]0,\infty[$ differenzierbar und die Ableitung $f'(t)$ L-transformierbar. Nach Definition ist dann $f'(t)$ in jedem endlichen Intervall $[0,T]$ (sogar absolut) integrierbar und es gilt

$$\int_0^T f'(t)\,dt \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^T f'(t)\,dt \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(T)-f(\varepsilon) \;=\; f(T)-\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\varepsilon)\ .$$

Also existiert der Grenzwert $f(0^+) := \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$.

Setzt man voraus, daß $f(t)$ höchstens exponentielles Wachstum hat, so folgt für alle hinreichend großen s mit partieller Integration:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, f'(t)\,dt \;=\; \underbrace{\mathrm{e}^{-st}\, f(t)\Big|_{t=0}^{t\to\infty}}_{=0} + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, f(t)\,dt\ .$$

Allgemeiner kann man so schließen:

Sei $s>0$ und das L-Integral $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, f'(t)\,dt$ der Ableitung konvergent.

Sei $\psi(x) := \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-st}\, f(t)\,dt$, $g(x) := \mathrm{e}^{sx}\,\psi(x)$ und $h(x) := \mathrm{e}^{sx}$.

Zu zeigen ist: Der Grenzwert $F(s) = \lim\limits_{x\to\infty}\psi(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ existiert und es gilt $sF(s)+f(0^+) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, f'(t)\,dt$.

ψ, g und h sind differenzierbar, denn f ist stetig. Es gilt $h'(x)\neq 0$ und $h(x)\to\infty$ für $x\to\infty$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\frac{g'(x)}{h'(x)} &= \frac{1}{s}\left[s\psi(x)+\psi'(x)\right] = \frac{1}{s}\left[s\int_0^x \mathrm{e}^{-st}\, f(t)\,dt + \mathrm{e}^{-sx}f(x)\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[-\,\mathrm{e}^{-st}\, f(t)\Big|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-st}\, f'(t)\,dt + \mathrm{e}^{-sx}f(x)\right]\\
&= \frac{1}{s}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{-st}\, f'(t)\,dt + f(0^+)\right]\\
&\to \frac{1}{s}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, f'(t)\,dt + f(0^+)\right]\ .
\end{aligned}$$

l'Hospital liefert die Behauptung.

Zusätzlich erhält man $\lim\limits_{x\to\infty}\psi'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-sx}\, f(x) = 0$. Unter den gemachten Voraussetzungen kann also $f(t)$ nur von höchstens exponentiellem Wachstum sein.

Beispiel 1: $f(t) := \ln t$ ist L-transformierbar, denn $f(t)$ ist in jedem endlichen Intervall $[0,T]$ absolut integrierbar und der Logarithmus wächst nicht mal linear, geschweige denn exponentiell.

Die Ableitung $f'(t) = 1/t$ ist nicht L-transformierbar, da das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-st}/t\,dt$ für alle $s \in \mathbb{R}$ divergiert.

Beispiel 2: Für $f(t) := 1 - \mathrm{e}^{-t}$ ist $f'(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Das Laplace-Integral von $f'(t)$ konvergiert für $s > -1$, das L-Integral von $f(t)$ nur für $s > 0$.

Beispiel 3: Für $f(t) := \mathrm{e}^t \sin t^2$ ist $f'(t) = \mathrm{e}^t (\sin t^2 + 2t \cos t^2)$. Das Laplace-Integral von $f(t)$ konvergiert für $s = 1$, das L-Integral von $f'(t)$ divergiert für $s = 1$.

Beispiel 4: Für $f(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t} \sin \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}$ ist $f'(t) = \mathrm{e}^t\, \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t} (\sin \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t} + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t} \cos \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t})$. Das Laplace-Integral von $f(t)$ konvergiert für $s > -1$, das L-Integral von $f'(t)$ divergiert für alle s.

$\boxed{\text{G}}$ *Grenzwerte von Bild und Urbild:*

$f(t)$ erfüllt in beiden Aussagen die Voraussetzungen des Differentiationssatzes 6.2.(8). Insbesondere existiert $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) =: f(0^+)$ und es ist

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) \;=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f'(t)\,dt \;=\; s\,F(s) - f(0^+)\;. \tag{1}$$

Nach Aufgabe 12.6.D.3 gilt $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) \to 0$ für $s \to \infty$. Also folgt die Behauptung (G.1):

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0^+} f(t) =: f(0+)\;.$$

Existiert zusätzlich das Laplace-Integral $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f'(t)\,dt$ für $s = 0$, so existiert der Grenzwert

$$f(\infty) \;:=\; \lim_{t\to\infty} f(t) \;=\; \lim_{t\to\infty} \int_0^t f'(\tau)\,d\tau\;.$$

Nach dem Differentiationssatz konvergiert das Laplace-Integral $F(s)$ von $f(t)$ für $s > 0$. Nach Aufgabe 12.6.D.2 konvergiert das Laplace Integral von $f'(t)$ für $s \geq 0$ sogar gleichmäßig. Man kann in Gleichung (1) den Limes für $s \to 0^+$ mit dem Integral vertauschen und erhält

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f'(t)\,dt \;=\; \int_0^\infty f'(t)\,dt \;=\; f(\infty) - f(0^+) \;=\; \lim_{s\to 0^+} s\,F(s) - f(0^+)\;.$$

Also wie behauptet $\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

H Sei $f(t) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t < \ln\ln 3 \\ (-1)^n \ \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t/2} & \text{für } \ln\ln n \le t < \ln\ln(n+1)\ (n \ge 3) \end{cases}$.

Das Laplace-Integral von $f(t)$ ist sicherlich für kein $s \in \mathbb{R}$ absolut konvergent, denn

$$\int_0^\infty \left|\mathrm{e}^{-st} f(t)\right| \, dt \;=\; \int_0^\infty \exp\left(-st + \mathrm{e}^t/2\right) \, dt$$

und es ist $\mathrm{e}^t/2 > -st$ für alle t ab einem gewissen t_0 .

Zur Untersuchung der einfachen Konvergenz betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} I_n \;&:=\; \int_{\ln\ln n}^{\ln\ln(n+1)} \exp\left(-st + \mathrm{e}^t/2\right) \, dt \\ &=\; \int_n^{n+1} \frac{(\ln x)^{-s-1}}{x^{1/2}} \, dx \ . \end{aligned}$$

Dabei wurde $\ln x = \mathrm{e}^t$ substituiert. Der Integrand nimmt ab einer Stelle monoton gegen Null ab. Also gilt $I_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $I_n > I_{n+1}$ ab einem n_0.

Die alternierende Reihe der Integrale $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n I_n$ konvergiert daher nach dem Leibnizkriterium. Dann konvergiert auch das Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt$, denn für $\ln\ln n < u < \ln\ln(n+1)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^u \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt \;&=\; \int_0^{\ln\ln n} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt \;+\; \int_{\ln\ln n}^u \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt \\ &=\; \sum_{k=3}^{n-1} (-1)^k I_k \;+\; \int_{\ln\ln n}^u \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt \end{aligned}$$

und das letzte Integral ist betragsmäßig kleiner als I_n.

Für dies Beispiel ist die Konvergenzabszisse $\sigma = -\infty$ und die Abszisse der absoluten Konvergenz $\sigma_a = +\infty$.