Pascalsches Dreieck zur Berechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$

Jede Zahl ist Summe der zwei links und rechts über ihr stehenden Zahlen.
z.B.: $6 + 4 = 10$

n	Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$	Zeilen-Summe
0	1	$2^0 = 1$
1	1 1	$2^1 = 2$
2	1 2 1	$2^2 = 4$
3	1 3 3 1	$2^3 = 8$
4	1 4 **6** + **4** 1	$2^4 = 16$
5	1 5 10 **10** 5 1	$2^5 = 32$
6	1 6 15 20 15 6 1	$2^6 = 64$
	$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$	
	$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$	$2^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}$

binomische Formel $\quad \boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \ n \in \mathbb{N}}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = \tbinom{2}{0}\, a^2 + \tbinom{2}{1}\, ab + \tbinom{2}{2}\, b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \tbinom{3}{0}\, a^3 + \tbinom{3}{1}\, a^2b + \tbinom{3}{2}\, ab^2 + \tbinom{3}{3}\, b^3 \\
\cdots \quad & \quad \cdots \\
(a+b)^6 &= \tbinom{6}{0}a^6 + \tbinom{6}{1}a^5b^1 + \tbinom{6}{2}a^4b^2 + \tbinom{6}{3}a^3b^3 + \tbinom{6}{4}a^2b^4 + \tbinom{6}{5}a^1b^5 + \tbinom{6}{6}b^6 \\
&= 1\,a^6 + 6\,a^5b + 15\,a^4b^2 + 20\,a^3b^3 + 15\,a^2b^4 + 6\,ab^5 + 1\,b^6
\end{aligned}$$

Speziell:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1}x + \tbinom{n}{2}\,x^2 + \cdots + \tbinom{n}{k}\,x^k + \cdots + \tbinom{n}{n-1}x^{n-1} + \tbinom{n}{n}x^n \\
&= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\
(1+x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\
(1+x)^4 &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \\
(1+x)^5 &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \\
(1+x)^6 &= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6
\end{aligned}$$

Ersetzt man x durch $-x$, so alternieren die Vorzeichen, z.B.:

$$(1-x)^6 = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$$

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
(a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc
\end{aligned}$$

$\binom{r}{k}$ – zunächst nur für $r \in \mathbb{N}$ erklärt – wird folgendermaßen für alle $r \in \mathbb{R}$ definiert:

allgemeine Binomialkoeffizienten $\binom{r}{k}$

Für $r \in \mathbb{R}$ und $k = 1, 2, \ldots$ ist

r über k

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

$$\binom{r}{0} = 1 \qquad \binom{r}{1} = r$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}$$

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

z.B.:

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10$$

$$\binom{1.4}{3} = \frac{1.4\cdot0.4\cdot(-0.6)}{3!} = -0.056$$

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{3!} = -4$$

$$\binom{\pi}{2} = \frac{\pi\cdot(\pi-1)}{2!} \approx 3.364$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{2!} = \frac{3}{8}$$

allgemeine binomische Formel, binomische Reihe

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k = \binom{r}{0}+\binom{r}{1}x+\binom{r}{2}x^2+\binom{r}{3}x^3+\cdots, \qquad \text{für } |x|<1$$

$$= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{1\cdot2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + - \cdots \quad \text{für } |x|<1$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}x^k = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots \quad \text{für } |x|<1$$

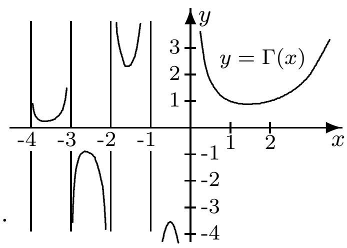
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}x^k = \binom{-1/2}{0}+\binom{-1/2}{1}x+\binom{-1/2}{2}x^2+\binom{-1/2}{3}x^3+\cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots \quad \text{für } |x|<1$$

Siehe auch **Potenzreihen**, Seiten 79–83 und **geometrische Reihe**, Seite 80

Γ–Funktion $\Gamma(x)$

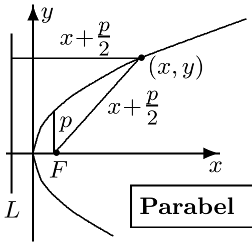
$$\Gamma(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt & , \ x > 0 \\[2ex] \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}, & x \neq 0, -1, -2, \cdots \ \text{(Polstellen)} \end{cases}$$



Eigenschaften:

$\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$	$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$	$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
$\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$	$\Gamma(x)\cdot\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$	$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$
		$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Parabel



Parabel $\boldsymbol{y^2 = 2px}$

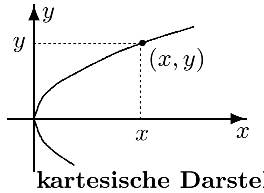
Eine Parabel ist die Menge aller Punkte $P = (x, y)$, die von einem festen Punkt (Brennpunkt $F = (\frac{p}{2}, 0)$) und einer festen Geraden (Leitlinie $L: \quad x = -\frac{p}{2}$) gleichen Abstand ($= x + \frac{p}{2}$) haben.

Bezeichnungen: $S = (0, 0)$ Scheitelpunkt
$F = (\frac{p}{2}, 0)$ Brennpunkt

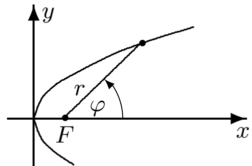
p Halbparameter (Ordinate im Brennpunkt / Entfernung Brennpunkt zur Leitlinie)

$\varepsilon = 1$ numerische Exzentrizität

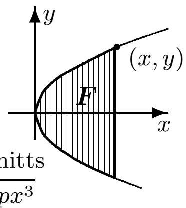
Darstellungen der Parabel (Scheitelpunkt im Ursprung, nach rechts geöffnet)



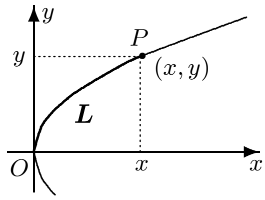
kartesische Darstellung
$y^2 = 2px$



Pol im Brennpunkt
$r = \frac{p}{1-\cos\varphi}$



Fläche
des Parabelabschnitts
$F = \frac{4}{3}xy = \frac{4}{3}\sqrt{2px^3}$



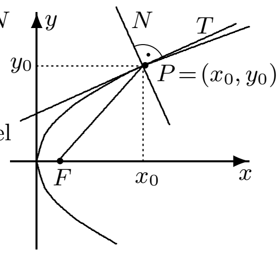
Länge $\boldsymbol{L}$
des Parabelbogens OP

$$L = \frac{p}{2}\left(\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right)$$
$$= \sqrt{x\left(x+\frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2}\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{2x}{p}}$$

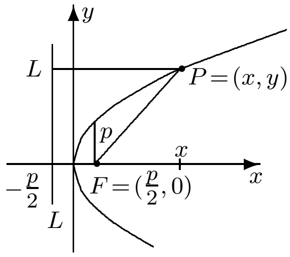
Tangente $\boldsymbol{T}$, Normale $\boldsymbol{N}$

$T: \quad yy_0 = p(x + x_0)$

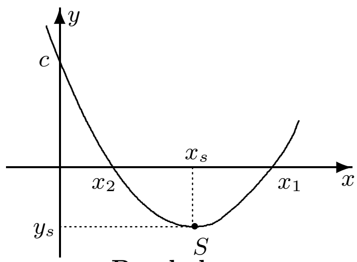
Die Gerade $y = mx + n$ ist Tangente an die Parabel
$\iff \quad p = 2mn$



Tangente T und Normale N im Parabelpunkt $P = (x_0, y_0)$ sind Winkelhalbierende der Winkel zwischen dem Brennpunktradiusvektor und der Geraden $y = y_0$.



Leitlinieneigenschaft
Leitlinie $L: \quad x = -\frac{p}{2}$
Abstand P zu L = Abstand P zu F



Parabel
$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

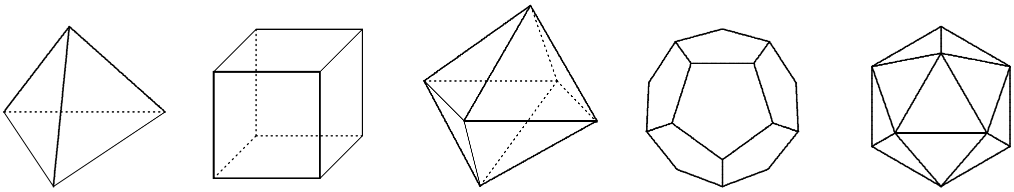
Scheitel $S = (x_s, y_s) = (\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$

$p = \frac{1}{2|a|}$ und $x_s = \frac{x_1+x_2}{2}$

Nullstellen $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2.4 Die 5 regulären Polyeder (Platonische Körper)

Platonische Körper werden durch kongruente regelmäßige Vielecke begrenzt so, daß in jedem Eckpunkt dieselbe Kantenzahl auftritt. Es gibt nur **5 Platonische Körper**:



Elemente der 5 regulären Polyeder (a = Kantenlänge)

		Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Anzahl/Form Seitenflächen		4 Dreiecke	6 Quadrate	8 Dreiecke	12 Fünfecke	20 Dreiecke
Anzahl	Ecken e	4	8	6	20	12
	Kanten k	6	12	12	30	30
	Flächen f	4	6	8	12	20
Oberfläche F		$\sqrt{3}\,a^2$	$6a^2$	$2\sqrt{3}\,a^2$	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\,a^2$	$5\sqrt{3}\,a^2$
Volumen V		$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$
Radius	einbe–schriebene Kugel r_i	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$	$\frac{\sqrt{10+22\sqrt{0.2}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{3}\,(5+\sqrt{5})}{12}a$
	umbe–schriebene Kugel r_u	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{3}\,(1+\sqrt{5})}{4}a$	$\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}a$

Eulerscher Polyedersatz

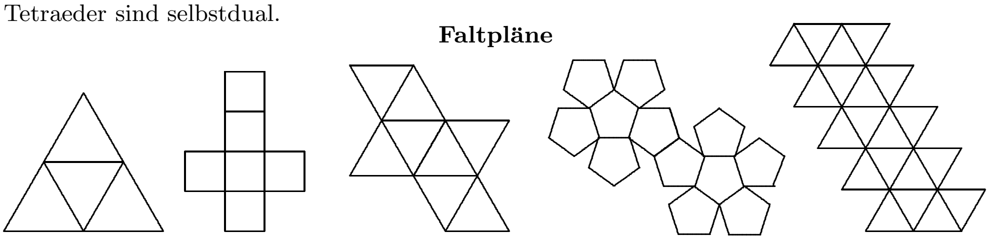
Ist $\boldsymbol{e}$ die Anzahl der **E**cken, $\boldsymbol{k}$ die Anzahl der **K**anten und $\boldsymbol{f}$ die Anzahl der **F**lächen eines konvexen Polyeders (oder eines Polyeders, das sich durch stetige Deformation in ein konvexes Polyeder überführen läßt), so ist $\boxed{\boldsymbol{e-k+f=2}}$

	Würfels		Oktaeder
Verbindet man die Flächenmittelpunkte eines	Dodekaeders	, so erhält man ein	Ikosaeder
	Tetraeders		Tetraeder

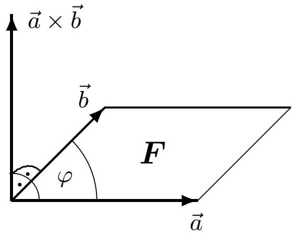
und umgekehrt (vgl. oben: Ecken $\longleftrightarrow$ Flächen).

Würfel und Oktaeder sind dual, ebenso Dodekaeder und Ikosaeder.
Tetraeder sind selbstdual.

Faltpläne



Vektorprodukt



$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Eigenschaften des Vektorproduktes:

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$ steht **senkrecht** auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ = **Flächeninhalt *F*** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem**.

(4) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}\vec{b} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}\vec{b} \end{pmatrix}$

Rechenregeln

(4) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(5) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

(6) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(7) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig.

mehrfache Produkte

(8) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ **Spatprodukt (Determinante)**

(9) $\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} \end{array}\right\}$ **Entwicklungssatz**

(10) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ **Jacobi–Identität**

Skalarprodukt aus 2 Vektorprodukten

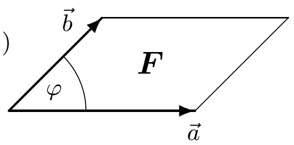
(11) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ **Lagrange–Identität**
speziell: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Vektorprodukt aus 2 Vektorprodukten

(12) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{d} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle \vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \rangle \vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{d}$
speziell: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{b}$

Beispiel

Man berechne Fläche F und Winkel φ des von $\vec{a} = (2, -1, 1)$ und $\vec{b} = (-1, 3, 2)$ aufgespannten Parallelogramms.

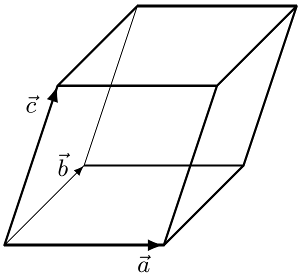


$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$F = |\vec{a} \times \vec{b}| = \underline{5\sqrt{3}}$$

$$\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arcsin \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arcsin \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}\sqrt{14}} \approx \underline{70.9^0}$$

Spatprodukt



$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle$$

zyklische Vertauschungen ändern das Spatprodukt nicht!

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

Regel von **Sarrus** (siehe Seite 55)

Eigenschaften des Spatproduktes:

(1) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \begin{cases} > 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} & \text{bilden ein } \textbf{Rechtssystem}. \\ = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} & \text{sind } \textbf{lin. abhängig} \text{ (liegen in einer Ebene).} \\ < 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} & \text{bilden ein } \textbf{Linkssystem}. \end{cases}$

(2) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{b} \rangle = -\langle \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \rangle$

(3) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ = **orientiertes Volumen** (= Volumen mit Vorzeichen) des von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten **Spats**.

(4) $|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|$ = **Volumen** des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten **Spats**.

(5) $\frac{1}{6} |\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|$ = **Volumen** des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten **Tetraeders**.

(6) $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}\vec{b} & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} & \vec{c}\vec{c} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}\vec{b} & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} & \vec{c}\vec{c} \end{pmatrix}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig $\iff$ $\boldsymbol{\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0}$ $\iff$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in einer Ebene.

Die Geraden $\vec{x} = \vec{a}_1 + t\vec{b}_1$ und $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{b}_2$ sind **windschief** $\iff$ $\langle \vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle \neq 0$.

Beispiel *Es seien* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Man berechne das Volumen V_S des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats, sowie das Volumen V_T des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Tetraeders.

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{-12}$$

Die Determinante ist negativ, die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden also ein Linkssystem!

Für die Volumina erhält man (Tetraedervolumen = $\frac{1}{6}$ Spatvolumen):

Vol. des Spats: $V_S = |\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle| = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \underline{\underline{12}}$, Vol. des Tetraeders: $V_T = \frac{1}{6} V_S = \underline{\underline{2}}$.

Gradient eines Skalarfeldes, Richtungsableitung

Ist $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein **Skalarfeld**, so ist $\operatorname{grad} f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein **Vektorfeld.**

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f$$ | **Gradient** von f

Darstellung des Gradienten in

kartesischen Koordinaten: $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$

Zylinderkoordinaten: $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$

Kugelkoordinaten: $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|})-f(\vec{x})}{h}$$ | **Richtungsableitung** von f an der Stelle $\vec{x}$ in Richtung des Vektors $\vec{a} \neq \vec{o}$.

Ist f in $\vec{x}$ differenzierbar, gilt für die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = |\operatorname{grad} f(\vec{x})| \cdot \cos\varphi \quad \text{mit} \quad \varphi = \sphericalangle\big(\operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{a}\big).$$

Richtungsableitung = Gradient mal Einheitsvektor

Geometrische Eigenschaften von Gradient und Richtungsableitung:

Ist $\varphi = \sphericalangle\big(\operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{a}\big)$ der Winkel zwischen $\operatorname{grad} f(\vec{x})$ und $\vec{a}$, so gilt:

- Die Richtungsableitung ist maximal für $\varphi = 0^0$:
  Der Gradient zeigt in Richtung maximalen Anstiegs!
- Die Richtungsableitung ist 0 für $\varphi = 90^0$:
  Der Gradient steht senkrecht auf der zu $\vec{x}$ gehörenden Niveaulinie/Niveaufläche.

Jacobi–Matrix eines Vektorfeldes, Vektorgradient

Ist $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(\vec{x}) = \big(v_x(\vec{x})\,,\ v_y(\vec{x})\,,\ v_z(\vec{x})\big)$ ein Vektorfeld, so heißt

$$\mathcal{J}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$ | **Jacobi–Matrix** von $\vec{v}$

$$(\vec{a}\operatorname{grad})\,\vec{v} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{v}(\vec{x}+h\vec{a})-\vec{v}(\vec{x})}{h}$$ | **Vektorgradient** von $\vec{v}$ an der Stelle $\vec{x}$ nach dem Vektor $\vec{a}$

Ist $\vec{v}$ in $\vec{x}$ differenzierbar, d.h. sind v_x, v_y, v_z in $\vec{x}$ differenzierbar, so gilt:

$(\vec{a}\operatorname{grad})\,\vec{v}(\vec{x}) = \mathcal{J}_{\vec{v}}(\vec{x}) \cdot \vec{a} = \big(\operatorname{grad} v_x(\vec{x}) \cdot \vec{a}\ ,\ \operatorname{grad} v_y(\vec{x}) \cdot \vec{a}\ ,\ \operatorname{grad} v_z(\vec{x}) \cdot \vec{a}\big)$

Vektorgradient = Jacobi–Matrix mal Vektor

$(\vec{a}\operatorname{grad})\,\vec{v} = \frac{1}{2}\big[\operatorname{rot}(\vec{v}\times\vec{a}) + \operatorname{grad}(\vec{v}\cdot\vec{a}) + \vec{a}\operatorname{div}\vec{v} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{a} - \vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{v} - \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{a}\big]$

Divergenz eines Vektorfeldes

Ist $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} = \big(v_x(\vec{x})\,,\, v_y(\vec{x})\,,\, v_z(\vec{x})\big)$ ein **Vektorfeld**, so ist $\operatorname{div}\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein **Skalarfeld**.

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$$ **Divergenz** von $\vec{v}$

Eine Stelle $\vec{x}$ heißt $\left\{ \begin{array}{c} \textbf{Quelle} \\ \textbf{Senke} \end{array} \right.$, falls $\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{v}(\vec{x}) > 0 \\ \operatorname{div}\vec{v}(\vec{x}) < 0 \end{array}$ ist.

$\vec{v}$ heißt in G **quellenfrei**, wenn $\operatorname{div}\vec{v}(\vec{x}) = 0$ ist für alle $\vec{x} \in G$.

Darstellung der **Divergenz** in

kartesischen Koordinaten: $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

Zylinderkoordinaten: $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

Kugelkoordinaten: $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial(\rho^2 v_\rho)}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta\, v_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\rho\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$

Rotation eines Vektorfeldes

Ist $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} = \big(v_x(\vec{x})\,,\, v_y(\vec{x})\,,\, v_z(\vec{x})\big)$ ein **Vektorfeld**, so ist $\operatorname{rot}\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein **Vektorfeld**.

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\,,\, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\,,\, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \nabla \times \vec{v}$$ **Rotation** von $\vec{v}$

Entsprechend zum Kreuzprodukt von Vektoren merkt man sich $\operatorname{rot}\vec{v}$ als:

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\,,\, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\,,\, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

$\vec{v}$ heißt **wirbelfrei** in G, wenn $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ ist für alle $\vec{x} \in G$.

$\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ ist die vektorielle Schreibweise der Integrabilitätsbedingung (Seite 158).

Ein in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G wirbelfreies Feld ist dort notwendigerweise konservativ!

Darstellung der **Rotation** in

kartesischen Koordinaten: $\operatorname{rot}\vec{v} = \big(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\big)\vec{e_x} + \big(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\big)\vec{e_y} + \big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\big)\vec{e_z}$

Zylinderkoordinaten: $\operatorname{rot}\vec{v} = \big(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\big)\vec{e_r} + \big(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\big)\vec{e_\varphi} + \big(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\big)\vec{e_z}$

Kugelkoordinaten:

$\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{\rho\sin\theta}\big(\frac{\partial(v_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\big)\vec{e_\rho} + \big(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot v_\varphi)}{\partial\rho}\big)\vec{e_\theta} + \big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\big)\vec{e_\varphi}$

Oberflächenintegrale

Das Oberflächenintegral $\int_F f\, dF$

Ist $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Skalarfeld und $F = \{\vec{x}(u,v) \mid (u,v) \in B\}$ Fläche im $\mathbb{R}^3$, so ist

$$\int_F f\, dF = \int_B f\big(\vec{x}(u,v)\big)\, |\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v)|\, d(u,v).$$

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

sind **Tangentenvektoren** an die Koordinatenlinien auf F.

$\vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$ ist **Normalenvektor** an F.

$dF = |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\, d(u,v)$ heißt **skalares Flächenelement**.

Für $f \equiv 1$ ergibt sich der **Flächeninhalt**: $A = \int_B |\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v)|\, d(u,v)$.

Das Oberflächenintegral $\int_F \vec{v}\, d\vec{F}$ (Flußintegral)

Ist $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Vektorfeld und $F = \{\vec{x}(u,v) \mid (u,v) \in B\}$ Fläche im $\mathbb{R}^3$, so ist

$$\int_F \vec{v}\, d\vec{F} = \int_B \vec{v}\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \big(\vec{x}_u(u,v) \times \vec{x}_v(u,v)\big)\, d(u,v).$$

$d\vec{F} = \big(\vec{x}_u \times \vec{x}_v\big)\, d(u,v)$ heißt **vektorielles Flächenelement**.

Das Vorzeichen ist ggf. der vorgegebenen Normalenrichtung anzupassen!

Bezeichnet $\vec{n}$ das Feld der äußeren Normaleneinheitsvektoren von F, so besteht zwischen den Integraltypen folgender Zusammenhang :

$$\int_F \vec{v}\, d\vec{F} = \int_F (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dF.$$

Beispiel *Man berechne den Fluß des Feldes* $\vec{v}(x,y,z) = \big(\frac{-x}{2}, -y, -z\big)$ *durch die Paraboloidkappe* $F = \{(x,y,z) \mid z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \implies \vec{x}_x \times \vec{x}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v}(\vec{x}) \cdot (\vec{x}_x \times \vec{x}_y) = \begin{pmatrix} -x/2 \\ -y \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} = y^2 \implies \vec{v} \cdot d\vec{F} = y^2\, d(x,y).$$

$$\int_F \vec{v}\, d\vec{F} = \int_{x^2+y^2 \le 1} y^2\, d(x,y) = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 r^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot r\, dr \Big)\, d\varphi = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}\pi}}.$$

12.2 Wichtige Felder

Kugelsymmetrische Felder $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$				**Coulombfeld** **Gravitationsfeld**
$\vec{v}(x,y,z)$	(x,y,z)	$\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$	$\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$
$\vec{v}(\vec{x})$	$\vec{x}$	$\frac{\vec{x}}{\\|\vec{x}\\|}$	$\frac{1}{\\|\vec{x}\\|}\cdot\frac{\vec{x}}{\\|\vec{x}\\|}$	$\frac{1}{\\|\vec{x}\\|^2}\cdot\frac{\vec{x}}{\\|\vec{x}\\|}$
Kugelkoord. $\vec{v}(\rho,\theta,\varphi)$	$(\rho,0,0)$	$(1,0,0)$	$(\frac{1}{\rho},0,0)$	$(\frac{1}{\rho^2},0,0)$
Def.bereich einf. zushg.	$\mathbb{R}^3$ ja	$\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{o}\}$ ja	$\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{o}\}$ ja	$\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{o}\}$ ja
Potential $\Phi(x,y,z)$	$\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ $=\frac{1}{2}\\|\vec{x}\\|^2=\frac{1}{2}\rho^2$	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $=\\|\vec{x}\\|=\rho$	$\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $=\ln\\|\vec{x}\\|=\ln\rho$	(Newton–Potential) $\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $=\frac{-1}{\\|\vec{x}\\|}=\frac{-1}{\rho}$
Kurvenintegral wegunabhängig	ja	ja	ja	ja
div $\vec{v}$	3	$\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $=\frac{2}{\\|\vec{x}\\|}=\frac{2}{\rho}$	$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ $=\frac{1}{\\|\vec{x}\\|^2}=\frac{1}{\rho^2}$	0
rot $\vec{v}$	$\vec{o}$	$\vec{o}$	$\vec{o}$	$\vec{o}$

Achsialsymmetrische Felder $r=\sqrt{x^2+y^2}$			**elektr. Feld** geladener Draht	**Magnetfeld** stromdurchfl. Leiter
$\vec{v}(x,y,z)$	$(x,y,0)$	$\frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{(x,y,0)}{x^2+y^2}$	$\frac{(-y,x,0)}{x^2+y^2}$
Zylinderkoord. $\vec{v}(r,\varphi,z)$	$(r,0,0)$	$(1,0,0)$	$(\frac{1}{r},0,0)$	$(0,\frac{1}{r},0)$
Def.bereich einf. zushg.	$\mathbb{R}^3$ ja	$\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}$ nein	$\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}$ nein	$\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}$ nein
Potential $\Phi(x,y,z)$	$\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $=\frac{1}{2}r^2$	$\sqrt{x^2+y^2}$ $=r$	**log. Potential** $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ $=\ln r$	lokal: $\arctan\frac{y}{x},\ x\neq 0$ $-\arctan\frac{x}{y},\ y\neq 0$
Kurvenintegral wegunabhängig	ja	ja	ja	nein
div $\vec{v}$	2	$\frac{1}{r}$	0	0
rot $\vec{v}$	$\vec{o}$	$\vec{o}$	$\vec{o}$	$\vec{o}$

13.6 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Homogene lineare DGL n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,\ \ a_k} \in \mathbb{R}$$

H Gesamtlösung: $\boxed{y_H = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n,\quad c_k \in \mathbb{R}}$

Dabei sind $y_1, \ldots, y_n$ n linear unabhängige Funktionen, man nennt sie ein Fundamentalsystem oder **Basislösungen**.

Der Ansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ führt auf die **charakteristische Gleichung**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Jede $\underline{k\text{–fache Lösung}}$ der char. Gleich. liefert $\underline{k \text{ lin. unabh. Lösungen}}$ der DGL:

Lösungen der char. Gleich.		Basislösungen der DGL
λ	1–fach reell	$\mathrm{e}^{\lambda x}$
λ	k–fach reell	$\mathrm{e}^{\lambda x},\ x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x},$
$\lambda = a \pm bi$	1–fach kompl.	$\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ $\mathrm{e}^{ax}\sin bx$
$\lambda = a \pm bi$	k–fach kompl.	$\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\quad x\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx, \ldots\quad x^{k-1}\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ $\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\quad x\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx, \ldots\quad x^{k-1}\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx$

Beispiele *Lösungen der charakteristischen Gleichung und Basislösungen*:

Lösungen der char. Gleichung	Basislösungen der homogenen DGL
$1,\ -2,\ 3$	$\mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^{-2x},\ \mathrm{e}^{3x}$
$0,\ \sqrt{3},\ 1+\sqrt{2}$	$1,\ \mathrm{e}^{\sqrt{3}\,x},\ \mathrm{e}^{(1+\sqrt{2}\,)x}$
$0,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,$	$1,\ x,\ \mathrm{e}^{2x},\ x\,\mathrm{e}^{2x},\ x^2\,\mathrm{e}^{2x}$
$1,\ 2 \pm 3i$	$\mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^{2x}\cos 3x,\ \mathrm{e}^{2x}\sin 3x$
$1 \pm 2i,\ 1 \pm 2i$	$\mathrm{e}^x\cos 2x,\ \mathrm{e}^x\sin 2x,\ x\,\mathrm{e}^x\cos 2x,\ x\,\mathrm{e}^x\sin 2x$
$0, 0, 0,\ \pm i, \pm i, \pm i$	$1, x, x^2,\ \cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x, x^2\cos x, x^2\sin x$

Homogene Eulersche DGL

$$\boldsymbol{x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \text{ mit } x > 0,\ \ a_k} \in \mathbb{R}$$

Die Subst.: $x = \mathrm{e}^t$, $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$ führt die DGL in eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten über. Mit der Kettenregel berechnet man z.B.

$$x \cdot y' = \dot{u} \qquad x^3 \cdot y''' = \dddot{u} - 3\ddot{u} + 2\dot{u}$$
$$x^2 \cdot y'' = \ddot{u} - \dot{u} \qquad x^4 \cdot y'''' = \ddddot{u} - 6\dddot{u} + 11\ddot{u} - 6\dot{u}$$

Ein weiterer Lösungsweg wird im **REP** Seite 457 beschrieben.

Schwingungs – DGL (lin. DGL 2. Ord. mit konst. Koeffizienten)
$$\boldsymbol{y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = r(x) \quad \text{mit} \quad k \geq 0,\ \omega_0 > 0}$$

Die Gesamtlösung ist $\boxed{y = y_S + y_H}$. Dabei ist

y_H die Gesamtlösung der **homogenen** DGL $\boxed{y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = 0}$

y_S eine (spezielle) Lösung der **inhomogenen** DGL $\boxed{y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = r(x)}$

Charakterist. Gleichung: $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow$ Lösungen $\underline{\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}}$

$\boxed{\text{H}}$ Gesamtlösung y_H der **homogenen** DGL $\boxed{y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = 0}$

$k > \omega_0$ **Starke Dämpfung** (Kriechfall) $\lambda_{1,2}$ reell, verschieden.
$\underline{y_H = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x}}$ mit $c_{1,2} \in \mathbb{R}$

$k = \omega_0$ **Aperiodischer Grenzfall**, $\lambda_1 = \lambda_2 = -k$.
$\underline{y_H = (c_1 + c_2 x)\, e^{-kx}}$ mit $c_{1,2} \in \mathbb{R}$

$k < \omega_0$ **Schwache Dämpfung**, $\lambda_{1,2}$ konjugiert komplexe Lösungen:
$\lambda_{1,2} = -k \pm i\sqrt{\omega_0^2 - k^2}$. Abkürzung $\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$
$$\begin{aligned} y_H &= (c_1 \cos \omega_1 x + c_2 \sin \omega_1 x)\, e^{-kx} \text{ mit } c_{1,2} \in \mathbb{R} \\ &= A\, e^{-kx} \sin(\omega_1 x + \varphi) \text{ mit } A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},\ \tan\varphi = \frac{c_1}{c_2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{I}}$ Eine spezielle Lösung y_S der **inhomogenen** DGL $\boxed{y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = r(x)}$

$k > \omega_0$ **Starke Dämpfung** (Kriechfall), Abkürzung $a := \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$
$$y_S = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} e^{-k(x-t)} \sinh a(x-t) r(t)\, dt$$

$k = \omega_0$ **Aperiodischer Grenzfall.**
$$y_S = \int_{x_0}^{x} (x-t)\, e^{-k(x-t)} r(t)\, dt$$

$k < \omega_0$ **Schwache Dämpfung**, Abkürzung $\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$
$$y_S = \frac{1}{\omega_1} \int_{x_0}^{x} e^{-k(x-t)} \sinh \omega_1 (x-t) r(t)\, dt$$

Kosinuserregte Schwingung $\boldsymbol{y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = F \cos \omega x,\ F \in \mathbb{R}}$

$k = 0$ **ungedämpfter** harmonischer Oszillator

$\omega \neq \omega_0$ keine Resonanz $y = c_1 \cos \omega_0 x + c_2 \sin \omega_0 x + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega x$

$\omega = \omega_0$ Resonanzfall $y = c_1 \cos \omega_0 x + c_2 \sin \omega_0 x + \frac{F}{2\omega_0} x \sin \omega_0 x$

$k > 0$ **gedämpfter** harmonischer Oszillator
$$y = e^{-kt}(c_1 \cos \omega_1 x + c_2 \sin \omega_1 x) + \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \sin(\omega x + \varphi)$$

17 Finanzmathematik

Zinssatz $p\%$ jährlich, Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$

1. Einmalige Zahlung: Anfangskapital K

Kapital nach n Jahren: $K_n = K \cdot q^n$

Barwert einer in n Jahren fälligen Zahlung: $K = K_n \cdot q^{-n}$

Anzahl der Jahre: $n = \dfrac{\ln(K_n/K)}{\ln q}$

Faustformel: *Eine Verdoppelung tritt nach etwa* $\frac{70}{p}$ *Jahren ein.*

2. Periodische Zahlungsraten R (Zinsgutschrift am Jahresende)

Zahlungsperiode:
Monat ($k = 12$), Vierteljahr ($k = 4$), Halbjahr ($k = 2$), Jahr ($k = 1$)

Zahlung von R am Anfang der Zahlungsperiode: $K_1 = R(k + \frac{p}{100} \cdot \frac{k+1}{2})$

Zahlung von R am Ende der Zahlungsperiode: $K_1 = R(k + \frac{p}{100} \cdot \frac{k-1}{2})$

Kapital nach n Jahren: $K_n = K_1 \dfrac{q^n-1}{q-1}$

Im Fall $k = 1$ (jährliche Zahlung) heißt R die **Annuität** und es gilt
$K_n = R\frac{q^n-1}{q-1}q$ (vorschüssige Zahlung), $K_n = R\frac{q^n-1}{q-1}$ (nachschüssige Zahlung).

3. Startkapital S und periodische Entnahme oder Einlage R

Kapital nach n Jahren, K_1 wie in 2.: $K_n = S \cdot q^n \pm K_1 \dfrac{q^n-1}{q-1}$

Ein Schuldbetrag S ist abgetragen bzw. ein Startkapital S ist verbraucht, falls $S \cdot q^n = K_1 \dfrac{q^n-1}{q-1}$

die benötigte Anzahl an Jahren ist $n = \dfrac{\ln K_1 - \ln(K_1 - S(q-1))}{\ln q}$

Beispiel: *Durch welche monatliche Sparrate R (Zahlung am Monatsanfang) kann eine Schuld von 20 000 € bei p% = 6% in 5 Jahren abgetragen werden?*

Lösung: $20\,000 \cdot 1,06^5 = R(12 + \frac{6}{100} \cdot \frac{13}{2}) \cdot \frac{1,06^5-1}{0,06} \implies \underline{R = 383,21\text{ €}}$.

4. Barwert B einer Ratenzahlung (Rente)

Erfolgt die Zahlung jeweils am Ende der Zahlungsperiode, gilt (vgl. mit 2.):

$$K_1 = R(k + \frac{p}{100} \cdot \frac{k-1}{2})$$

$$K_n = K_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

Der Barwert ist $B = K_1 \dfrac{q^n-1}{q-1} \cdot q^{-n}$

Der Barwert B einer **ewigen Rente** ($n \to \infty$) ist $B = \frac{K_1}{q-1}$.

Beispiel: *Welches Kapital B sichert eine ewige monatliche Rente von 1 000 € bei einem Zinssatz von p% = 5% jährlich?*

Lösung: $B = \frac{K_1}{q-1} = 1\,000\,(12 + \frac{5}{100} \cdot \frac{11}{2})/0,05 \implies \underline{B = 245\,500\text{ €}}$.